DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE CÁLCULO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: uma construção dos elementos de área que simplifica as operações com Integral única em coordenadas polares

Engº. Agrônomo Leandro Salles Nogueira
Colégio Cenecista Walter Francklin – Três Rios, RJ
C.E. Dr. Valmir Peçanha – Três Rios, RJ
Ex-monitor de Cálculo I e II – Departamento de Matemática da UFV
lsnogueira82@hotmail.com

Kleber Kilhian
Licenciado em Matemática pela Unimesp
Kleber_kilhian@terra.com.br

A demonstração da fórmula de cálculo da área de uma superfície esférica é algo que sempre instiga os estudantes e é comum encontrar, na rede, perguntas de internautas sobre tal demonstração. Relutando em olhar as demonstrações existentes, tentei algumas vezes chegar a alguma e não consegui. Recentemente, ao descascar uma laranja, retomei o desafio (de fazer sem olhar) construindo o elemento diferencial de área como na Figura 1; aí foi fácil, após a transformação para coordenadas polares, eliminando as retangulares. Porém, ao procurar pela demonstração, para comparar, fiquei surpreso: em LEITHOLD, L. **O Cálculo com geometria analítica.** 3 ed. Harbra, v.2, na página 1.059 (integração múltipla em coordenadas esféricas), onde esperava encontrar, não tem; o mesmo em James Stewart – **Cálculo.** v.2. Na rede, o que encontrei, além de muitas perguntas sobre assunto, foi a derivação do volume. Se já não tivesse feito o que vem a seguir, iria pensar: humm! A coisa deve ser feia e cabeluda! Além disso, alguns colegas relataram não ter visto, ainda, tal construção do elemento de área. Isso, então, me motivou a apresentar o que segue.

Acredito que outras pessoas já devam ter desenvolvido a mesma demonstração, no entanto, parece difícil de ser encontrada publicada em algum meio. A construção do elemento diferencial de área pode ser considerada análoga à construção que se faz em coordenadas esféricas, ao eliminar a integração em teta (θ) (não sendo necessário integrar para obter a área de cada anel, uma vez que a largura de cada anel é constante) e integrar apenas em fi (φ).

Ou seja, a demonstração apresentada a seguir corresponde a se trabalhar com o ângulo complementar a fi (φ).

Elemento diferencial de Área (dA)

Descascando uma laranja em anéis (e não helicoidais), fora do equador, as bordas de cada anel serão circunferências com raios distintos, uma maior que a outra:

Figura1 – Laranja

A largura do anel pode ser descrita pela forma simplificada do comprimento de arco:

$l = r\, d\theta$

onde l é a largura do anel, r é o raio da circunferência e $d\theta$ é a variação infinitesimal do ângulo central.

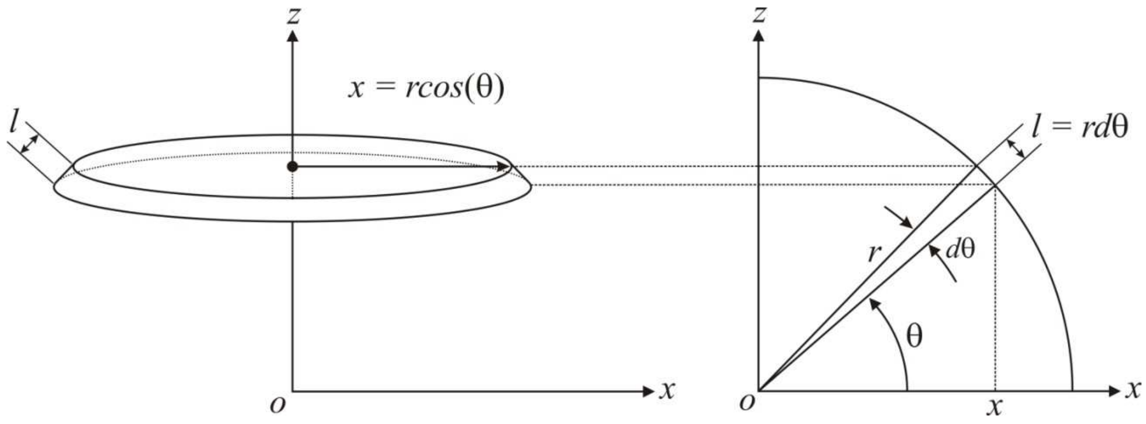

Figura 2 – Construção dos elementos diferenciais de área em coordenadas polares

Mas, se estes anéis tiverem larguras infinitesimais, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por:

$$C(x) = 2\pi\, x \qquad (\, I\,)$$

Vejam que o perímetro C está em função do raio x.

Fazendo uma transformação para coordenadas polares, destacamos o triângulo retângulo da figura 2:

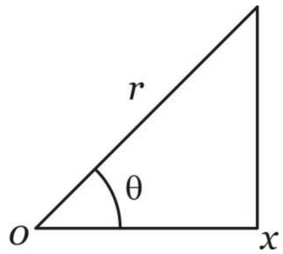

Figura 3 – Triângulo retângulo

Temos que:

$$x = r\cos(\theta) \qquad (\, II\,)$$

Substituindo o membro da direita da equação *(II)* em *(I)*, obtemos:

$$C(\theta) = 2\pi\, r\cos(\theta)$$

Vejam que agora o perímetro C está em função do ângulo central θ. Então, a área da superfície do anel de largura infinitesimal (dA) será dada pelo produto de seu perímetro C por sua altura l :

$dA(\theta) = C(\theta)\ l$

$dA(\theta) = 2\pi\ r\ cos(\theta)\ r\ d\theta$

$dA(\theta) = 2\pi\ r^2\ cos(\theta)\ d\theta$

Com $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Como o ângulo θ varia de 0 a $\pi/2$, obtemos anéis da esfera somente na parte superior ao eixo dos x, e, conseqüentemente, somente a metade da área de sua superfície. Para encontrar a área total, basta multiplicar por 2. Aplicamos, então, a integral definida:

$$A(r) = 2\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \cdot \cos(\theta) \cdot d(\theta)$$

$$A(r) = 4\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \cdot d(\theta)$$

$$A(r) = 4\pi r^2 \left[sen(\theta)\right]_0^{\pi/2}$$

$$A(r) = 4\pi r^2 \left[sen(\pi/2) - sen(0)\right]$$

$$A(r) = 4\pi r^2 \left[1 - 0\right]$$

$$A(r) = 4\pi r^2$$

Vejam que o cálculo poderia ter terminado na segunda linha! A integral é notável e vale 1.

A separação didática que os autores normalmente fazem entre os diversos sistemas de coordenadas, com os respectivos exercícios pertinentes a cada um sendo propostos de modo bem "separadinho" pode inibir que o leitor imagine o que foi apresentado acima. Ou seja, tratando, nos tópicos relacionados a coordenadas polares, quase que somente de figuras planas (de espirais a lemniscatas) e, no caso de coordenadas esféricas, com os três parâmetros – mais complicados e com integração em duas e três dimensões – alguns leitores podem ser levados a pensar que a construção do elemento de área só possa ser possível com os recursos de coordenadas esféricas ou retangulares em três dimensões.

E então, como fica o volume?

Bom, essa já tem pra todo lado. É corriqueira, partindo da fórmula da área já conhecida.

O que mais me incomodava era o fato de conseguir fazer a demonstração da fórmula do volume (em "x" e "y", empregando discos) enquanto a área, essa não saía!

É claro que sabendo a fórmula da área, para fazer o volume, basta partir da 5ª linha abaixo. Mas é preciso saber como chegar nela.

$$dv = da \cdot dr$$

$$dv = 2\pi r^2 \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \cdot dr$$

$$V(r) = \int_0^r \left(\int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \right) dr$$

$$V(r) = \int_0^r A(r) dr$$

$$V(r) = 4\pi \int_0^r r^2 dr$$

$$V(r) = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Creio que todos sejam capazes de imaginar o que representa o termo $A(r)dr$.

Os referidos autores, nas obras citadas acima, destacam a importância de se optar por um sistema de coordenadas apropriado, numa integralização desse tipo. Experimente fazer isso em coordenadas retangulares e vai ver que a coisa, realmente, fica feia.

Na verdade, os autores consideram tão evidente e fácil a demonstração que nem, se quer, chegam a propor tal exercício em suas obras! Certamente, com medo de ofender o leitor. Os problemas lá propostos são, sim, muito mais complexos.

Humilde e antecipadamente, peço desculpas caso seja corriqueira, também, a primeira.

De qualquer forma, "taí".

Agradecimento:

Agradeço de modo especial ao nobre colega Kleber Kilhian, pelo trabalho de revisão e aprimoramento do texto, desenhos e equações, proporcionando maior clareza e rigor.