Funções e suas propriedades

Objetivos de aprendizagem

- Definição de função e notação.
- Domínio e imagem.
- Continuidade de uma função.
- Funções crescentes e decrescentes.
- Funções limitadas.
- Extremos local e absoluto.
- Simetria.
- Assíntotas.
- Comportamento da função nas extremidades do eixo horizontal.

Os assuntos funções e gráficos formam a base para entender a matemática e as aplicações matemáticas que podem ser vistas em várias áreas do conhecimento.

Definição de função e notação

A matemática e suas aplicações estão repletas de exemplos de fórmulas com as quais as variáveis quantitativas estão relacionadas. Tanto a linguagem como a notação de funções são adequadas para trabalhar com tal ferramenta.

DEFINIÇÃO Função, conjunto domínio (ou simplesmente domínio) e conjunto imagem (ou simplesmente imagem)

Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma lei que associa para todo elemento em A um único elemento em B. O conjunto A é o **domínio** da função e o conjunto B de todos os valores produzidos com essa associação é o conjunto **imagem**. O que pode ocorrer é a função estar definida como sendo de um conjunto A em um conjunto C, de modo que esse conjunto C não seja o conjunto imagem, e sim um conjunto que contém a imagem. Neste caso, esse conjunto C é conhecido como contradomínio. Neste texto, falaremos da função definida de um conjunto em outro, sendo o segundo considerado o conjunto imagem.

Existem várias maneiras de observar funções. Uma das mais intuitivas é a idéia de uma "máquina" (veja a Figura 7.1), na qual valores x do domínio são colocados dentro da própria máquina (que faz papel da função) para produzir valores y da imagem. Para indicar que y vem de uma função que atua sobre x, usamos a **notação de função** de Euler dada por $y = f(x)$ (podemos ler como "**y igual a f de x**" ou "**o valor de f em x**"). Aqui, x é a **variável independente** e $y = f(x)$ é a **variável dependente**.

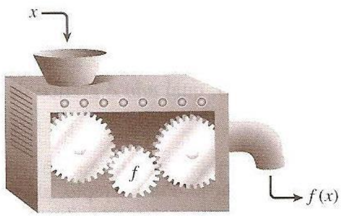


Figura 7.1 Um diagrama de uma "máquina" para compreender função.

Uma função pode também ser vista como uma relação dos elementos do domínio com os elementos da imagem. A Figura 7.2(a) mostra uma função que relaciona elementos do domínio X com os elementos da imagem Y. A Figura 7.2(b) mostra uma outra relação, mas *esta não é de uma função*, uma vez que a regra de que o elemento x_1 associa a um *único* elemento de Y não ocorre.

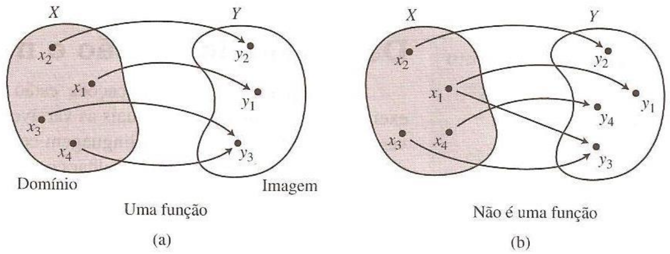


Figura 7.2 O diagrama em (a) retrata uma relação de X em Y, que é uma função. O diagrama em (b) retrata uma relação de X em Y, que não é uma função.

A unicidade do valor da imagem é muito importante para estudarmos o seu comportamento. Saber que $f(2) = 8$ e, posteriormente, verificar que $f(2) = 4$ é uma contradição. O que acontece é que jamais teremos uma função definida por uma fórmula ambígua como $f(x) = 3x \pm 2$.

EXEMPLO 1 Verificação se é ou não uma função

A fórmula $y = x^2$ define y como uma função de x?

SOLUÇÃO

Sim, y é uma função de x. De fato, podemos escrever a fórmula com a notação $f(x) = x^2$. Quando um número x é substituído na função, o quadrado de x será o resultado e não existe ambigüidade quanto ao que significa o quadrado de x.

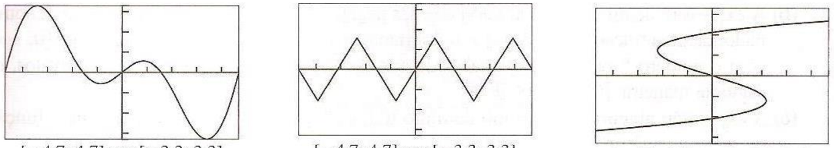
Uma outra forma de observar funções é graficamente. O **gráfico da função $y = f(x)$** é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio de f. Podemos visualizar os valores do domínio sobre o eixo horizontal x, como também os valores da imagem sobre o eixo vertical y, tomando como referência os pares ordenados (x, y) do gráfico de $y = f(x)$.

EXEMPLO 2 Verificação se é ou não uma função

Dos três gráficos mostrados na Figura 7.3, qual *não* é gráfico de uma função? Como você pode explicar?

SOLUÇÃO

O gráfico em (c) não é gráfico de uma função. Por exemplo, existem três pontos no gráfico com a coordenada $x = 0$, de modo que não existe um *único* valor de y para esse valor $x = 0$. Podemos verificar que isso ocorre para outros valores de x (aproximadamente entre -2 e 2). Os outros dois gráficos não apresentam esse problema, já que nenhuma linha vertical (imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto. Gráficos que passam por esse *teste da linha vertical* são gráficos de funções.



[−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3] (a)   [−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3] (b)   [−4,7; 4,7] por [−3,3; 3,3] (c)

Figura 7.3 Um destes não é gráfico de função (Exemplo 2).

Teste da linha vertical

Um gráfico (conjunto de pontos (x, y)) no plano cartesiano define y como uma função de x se e somente se nenhuma linha vertical (nem que seja imaginária) cruza o gráfico em mais de um ponto.

Domínio e imagem

Uma função pode ser definida algebricamente por meio da regra (ou lei) em termos da variável x do domínio. A regra, no entanto, não nos fornece todas as informações sem que seja definido o domínio.

Por exemplo, podemos definir o volume de uma esfera como uma função do seu raio, pela fórmula

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ (Observe que temos "}V\text{ de }r\text{" e não "}V \cdot r\text{")}$$

Essa *fórmula* está definida para todos os números reais, mas a *função* volume não está definida para valores negativos de r. Assim, se a nossa intenção é estudar a função volume, podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.

Observação

A menos que tenhamos um modelo (como o volume citado agora) que necessita de um domínio restrito, assumiremos que o domínio de uma função definida por uma expressão algébrica é o mesmo que o domínio da própria expressão algébrica.

EXEMPLO 3 Verificação do domínio de uma função

Encontre o domínio de cada função:

(a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$

(c) $A(s) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$, onde $A(s)$ é a área de um triângulo eqüilátero com lados de comprimento s.

SOLUÇÃO

Solução algébrica

(a) A expressão dentro do radical não pode ser negativa. Como devemos ter $x + 3 \geq 0$, então $x \geq -3$. O domínio de f é o intervalo $[-3, +\infty[$.

(b) A expressão dentro do radical não pode ser negativa; portanto, $x \geq 0$. Também, o denominador de uma fração não pode ser zero; portanto, $x \neq 5$. O domínio de g é o intervalo $[0, +\infty[$ com o número 5 removido, o qual podemos escrever como a *união* de dois intervalos, da seguinte maneira: $[0, 5[\cup]5, +\infty[$.

(c) A expressão algébrica tem como domínio todos os números reais, mas pelo que a função representa, s não pode ser negativo. O domínio de A é o intervalo $[0, +\infty[$.

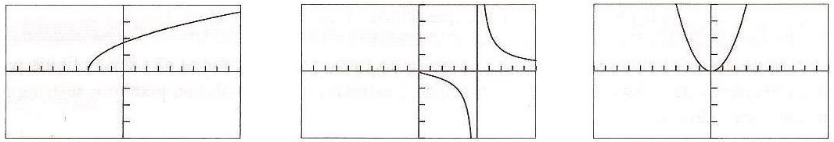
Suporte gráfico

Podemos justificar algebricamente nossas respostas em (a) e (b) a seguir. Uma calculadora que faz gráfico ou um software não fornece pontos com valores de x impossíveis de efetuar contas.

(a) Observe que o gráfico de $y = \sqrt{x + 3}$ (veja a Figura 7.4a) mostra pontos somente para $x \geq -3$, como era esperado.

(b) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 5}$ (veja a Figura 7.4b) mostra pontos somente para $x \geq 0$, como era esperado, mas mostra uma reta vertical que corta o eixo x em $x = 5$. Esta reta não faz parte da representação gráfica, é apenas uma maneira de mostrar que o 5 não está no domínio.

(c) O gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (veja a Figura 7.4c) mostra o domínio não restrito da expressão algébrica: conjunto de todos os números reais. Essa é a conclusão a que chegamos somente observando a função e o que ela significa, pois até então podemos não saber que s é o comprimento do lado do triângulo



[−10, 10] por [−4, 4] (a)   [−10, 10] por [−4, 4] (b)   [−10, 10] por [−4, 4] (c)

Figura 7.4 Gráficos das funções do Exemplo 3.

Encontrar algebricamente a imagem de uma função é muitas vezes mais árduo que encontrar o domínio, embora, graficamente, as identificações de domínio e imagem sejam similares. Para encontrar o *domínio*, olhamos para os *valores no eixo horizontal x*, que são as primeiras coordenadas dos pontos do gráfico; para encontrar a *imagem*, olhamos para os *valores no eixo vertical y*, que são as segundas coordenadas dos pontos do gráfico. Podemos utilizar os recursos algébricos e gráficos novamente.

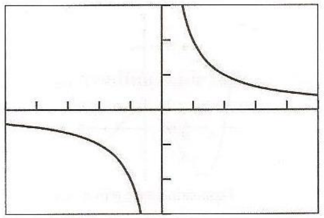
EXEMPLO 4 Verificação da imagem de uma função

Encontre a imagem da função $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

SOLUÇÃO

Solução gráfica

O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$ está mostrado na Figura 7.5.



[−5, 5] por [−3, 3]

Figura 7.5 O gráfico de $y = \dfrac{2}{x}$.

O gráfico não está definido para $x = 0$, o que já era previsto uma vez que o denominador da função não pode ser 0. Vemos também que a imagem é o conjunto de todos os números reais diferentes de zero.

Solução algébrica

Confirmamos que 0 não está na imagem ao tentar resolver $\dfrac{2}{x} = 0$. (A proposta é verificar se existe algum valor de x tal que $\dfrac{2}{x}$ seja 0.)

$$\frac{2}{x} = 0$$
$$2 = 0 \cdot x$$
$$2 = 0$$

Como a equação $2 = 0$ não é verdade, $\dfrac{2}{x} = 0$ não tem solução e, assim, $y = 0$ não está na imagem. Mas como sabemos que todos os outros números reais estão na imagem? Seja k um outro número real qualquer (diferente de zero) e vamos resolver $\dfrac{2}{x} = k$:

$$\frac{2}{x} = k$$
$$2 = k \cdot x$$
$$x = \frac{2}{k}$$

Como podemos ver, não existe problema em encontrar valores de x (que depende de k) e a imagem é, de fato, dada por $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Continuidade de uma função

Uma das mais importantes propriedades da maioria das funções que modelam o comportamento de ocorrências do mundo real é o fato de elas serem *contínuas*. Graficamente falando, uma função é contínua num ponto se o gráfico não apresenta falha (do tipo "quebra", "pulo"...) naquele ponto. Podemos ilustrar o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 7.6):

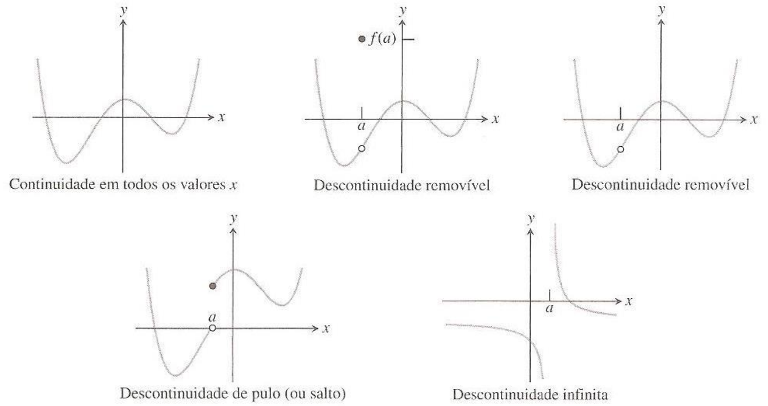
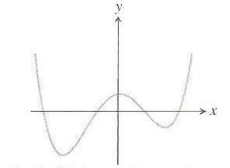


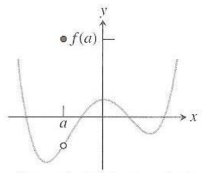
Figura 7.6 Alguns casos de pontos de descontinuidade.

Vamos observar cada caso individualmente.



Continuidade em todos os valores x

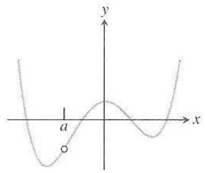
Este gráfico é contínuo em todo x. Note que o gráfico não tem quebra. Isso significa que, se estamos estudando o comportamento da função f para valores de x próximos a qualquer número real a, podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$.



Descontinuidade removível

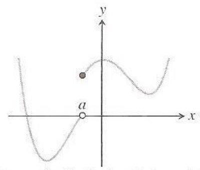
Este gráfico é contínuo exceto para o "buraco" em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento desta função f para valores de x próximos de a, *não* podemos assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$. Neste caso, $f(x)$ é menor que $f(a)$ para x próximo de a.

Isso é chamado de **descontinuidade removível** porque o gráfico pode ser "remendado" (ou "consertado") redefinindo $f(a)$.



Descontinuidade removível

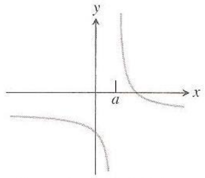
Este gráfico tem também uma **descontinuidade removível** em $x = a$. Se estamos estudando o comportamento desta função f para valores de x próximos de a, continuamos sem poder assegurar que os valores $f(x)$ estarão próximos a $f(a)$ porque, neste caso, $f(a)$ não existe. É removível porque poderíamos definir $f(a)$ completando o "buraco" e fazer f contínua em a.



Descontinuidade de pulo (ou salto)

Aqui está uma descontinuidade que não é removível. É uma **descontinuidade de pulo** porque existe mais que um "buraco" em $x = a$; existe um *pulo* (ou *salto*) nos valores da função que fazem o espaço impossível de completar com um simples ponto $(a, f(a))$.

Esta é uma função com uma **descontinuidade infinita** em $x = a$. Não é possível fazer nada do que citamos anteriormente.



Descontinuidade infinita

O simples conceito geométrico de um gráfico que não esteja "quebrado" em um ponto $(a, f(a))$ é uma daquelas noções visuais difíceis para explicar cuidadosamente na linguagem algébrica. A principal idéia é perceber que os pontos $(x, f(x))$ estão sobre o gráfico da função e se aproximam de $(a, f(a))$, por qualquer um dos lados, sem, necessariamente, atingir $(a, f(a))$. Uma função é **contínua em** $x = a$ se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Uma função f é **descontínua em** $x = a$ se não é contínua em $x = a$.

EXEMPLO 5 Verificação de pontos de descontinuidade

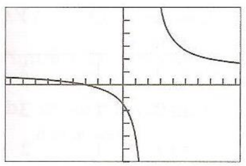
Analise os gráficos e verifique qual das seguintes figuras mostra funções que são descontínuas em $x = 2$. Qualquer descontinuidade é do tipo removível?

SOLUÇÃO

A Figura 7.7 mostra uma função que não está definida em $x = 2$ e, portanto, não é contínua para este valor. A descontinuidade em $x = 2$ não é removível (é do tipo descontinuidade infinita).

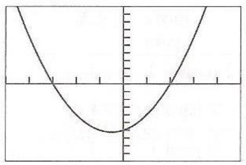
O gráfico da Figura 7.8 é de uma função do segundo grau cuja representação é uma parábola, um gráfico que não tem "quebra" porque seu domínio inclui todos os números reais. É contínua para todo x.

O gráfico da Figura 7.9 é de uma função que não está definida em $x = 2$ e assim não é contínua para este valor. O gráfico parece uma reta, que é a representação de uma função do primeiro grau, dada por $y = x + 2$, com exceção que existe um "buraco" no local do ponto (2, 4). Esta é uma descontinuidade removível.



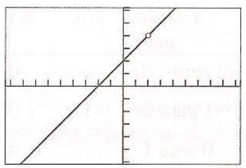
$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6, 6]$

Figura 7.7 $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$



$[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

Figura 7.8 $g(x) = (x+3)(x-2)$



$[-9{,}4; 9{,}4]$ por $[-6{,}2; 6{,}2]$

Figura 7.9 $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Funções crescentes e decrescentes

Um outro conceito de função que é fácil de entender graficamente é a propriedade de ser crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo. Ilustramos o conceito com poucos gráficos (veja a Figura 7.10):

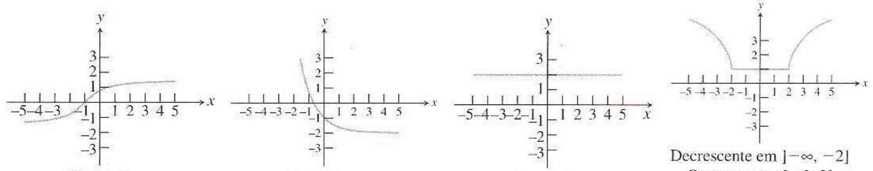


Figura 7.10 Exemplos de funções crescente, decrescente ou constante sobre um intervalo.

Vejamos alguns casos com números.

1. Das três tabelas de dados numéricos abaixo, qual poderia ser modelada por uma função que seja (a) crescente, (b) decrescente ou (c) constante?

X	$Y1$
−2	12
−1	12
0	12
1	12
3	12
7	12

X	$Y2$
−2	3
−1	1
0	0
1	−2
3	−6
7	−12

X	$Y3$
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
3	4
7	10

2. $\Delta Y1$ significa a *variação* nos valores de $Y1$ quando os valores de X variam de modo crescente. Na mudança de $Y1 = a$ para $Y1 = b$, a variação é $\Delta Y1 = b - a$. O mesmo ocorre com os valores de $Y2$ e $Y3$.

X move para	ΔX	$\Delta Y1$
−2 para −1	1	0
−1 para 0	1	0
0 para 1	1	0
1 para 3	2	0
3 para 7	4	0

X move para	ΔX	$\Delta Y2$
−2 para −1	1	−2
−1 para 0	1	−1
0 para 1	1	−2
1 para 3	2	−4
3 para 7	4	−6

X move para	ΔX	$\Delta Y3$
−2 para −1	1	2
−1 para 0	1	2
0 para 1	1	2
1 para 3	2	3
3 para 7	4	6

3. Quando a função é constante, o quociente $\Delta Y/\Delta X$ é 0.
Quando a função é decrescente, o quociente $\Delta Y/\Delta X$ é negativo.
Quando a função é crescente, o quociente $\Delta Y/\Delta X$ é positivo.

Essa análise feita dos quocientes $\Delta Y/\Delta X$ pode nos ajudar a compreender a seguinte definição:

DEFINIÇÃO Funções crescente, decrescente e constante sobre um intervalo

Uma função f é **crescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente crescente.
Uma função f é **decrescente** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$). Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, dizemos que a função é estritamente decrescente.
Uma função f é **constante** sobre um intervalo se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ • (ou seja, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$)

EXEMPLO 6 Análise do comportamento de uma função crescente/decrescente

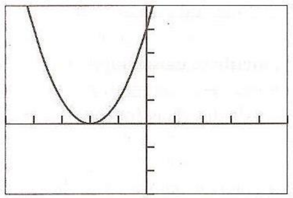
Para cada função, verifique os intervalos nos quais ela é crescente, como também decrescente.

(a) $f(x) = (x + 2)^2$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

SOLUÇÃO

Solução gráfica

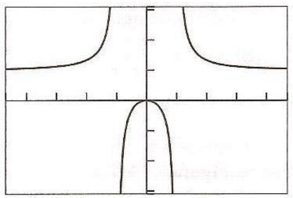
(a) Vemos no gráfico da Figura 7.11 que f é decrescente sobre o intervalo $]-\infty, -2]$ e crescente sobre o intervalo $[-2, +\infty[$ (observe que incluímos -2 nos dois intervalos; isso não acarreta contradição porque falamos de funções crescente ou decrescente sobre *intervalos* e -2 não é um intervalo).



$[-5, 5]$ por $[-3, 5]$

Figura 7.11 A função $f(x) = (x + 2)^2$

(b) Vemos no gráfico da Figura 7.12 que g é crescente sobre o intervalo $]-\infty, -1[$, crescente novamente sobre $]-1, 0]$, decrescente sobre $[0, 1[$ e decrescente novamente sobre o intervalo $]1, +\infty[$.



$[-4{,}7; 4{,}7]$ por $[-3{,}1; 3{,}1]$

Figura 7.12 A função $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Vale observar que fizemos algumas suposições sobre os gráficos. Como sabemos que os gráficos não retornam ao eixo x em algum lugar que não aparece nas representações? Desenvolveremos algumas maneiras para responder a questão, porém, a teoria a esse respeito é estudada em cálculo.

Funções limitadas

O conceito de *função limitada* é simples de entender tanto gráfica como algebricamente. Veremos a definição algébrica após introduzirmos o conceito com alguns gráficos típicos (veja a Figura 7.13).

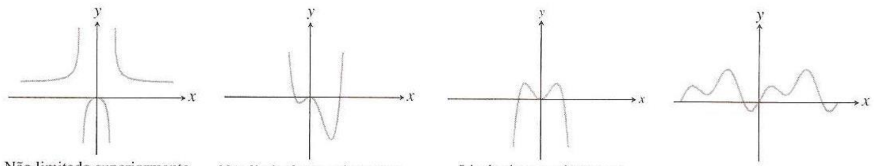


Figura 7.13 Alguns exemplos de gráficos limitados e não limitados superior e inferiormente.

DEFINIÇÃO Limite inferior e limite superior da função e função limitada

Uma função f é **limitada inferiormente** se existe algum número b que seja menor ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número b, este é chamado de **limite inferior** de f.
Uma função f é **limitada superiormente** se existe algum número B que seja maior ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número B, este é chamado de **limite superior** de f.
Uma função f é **limitada** se é limitada das duas formas, superior e inferiormente.

Podemos estender a definição anterior para a idéia de **limitação da função para x em um intervalo**, restringindo o domínio no intervalo de interesse. Por exemplo, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é limitada superiormente sobre o intervalo $]-\infty, 0[$ e limitada inferiormente sobre o intervalo $]0, +\infty[$.

EXEMPLO 7 Verificação do limite de função

Identifique se cada função é limitada inferiormente, limitada superiormente ou limitada.

(a) $w(x) = 3x^2 - 4$ **(b)** $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

SOLUÇÃO

Solução gráfica

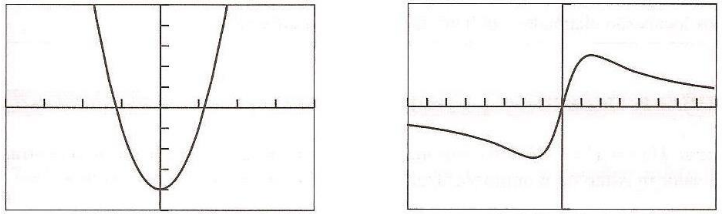
Os dois gráficos são demonstrados na Figura 7.14. Podemos verificar que w é uma função limitada inferiormente e que p é uma função limitada.

Verificação

Podemos confirmar que w é uma função limitada inferiormente encontrando o limite inferior, como se segue:

$$x^2 \geq 0$$
$$3x^2 \geq 0$$
$$3x^2 - 4 \geq 0 - 4$$
$$3x^2 - 4 \geq -4$$

Assim, -4 é o limite inferior para $w(x) = 3x^2 - 4$.
Deixamos a verificação que p é uma função limitada como um exercício.



$[-4, 4]$ por $[-5, 5]$
(a)

$[-8, 8]$ por $[-1, 1]$
(b)

Figura 7.14 Os gráficos para o Exemplo 7. Quais são limitados e quais são esses limites?

Extremos local e absoluto

Muitos gráficos são caracterizados pelos "altos e baixos" quando mudam o comportamento de crescimento para decrescimento e vice-versa. Os valores extremos da função (ou *extremo local*) podem ser caracterizados como *máximo local* ou *mínimo local*. A distinção pode ser verificada facilmente pelo gráfico. A Figura 7.15 mostra um gráfico com três extremos locais: máximo local nos pontos P e R, além de mínimo local em Q.

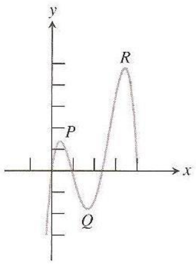


Figura 7.15

Este é um outro conceito mais fácil de ver graficamente do que descrever algebricamente. Observe que um máximo local não tem que ser o valor máximo de uma função; ele precisa ser somente um valor máximo da função para x pertencente a *algum* intervalo pequeno.

Já mencionamos que o melhor método para analisar comportamento crescente e decrescente envolve ferramentas de cálculo. O mesmo vale para extremos locais. É suficiente compreendermos esses conceitos por meio do gráfico, embora uma confirmação algébrica poderá ser necessária quando aprendermos mais sobre funções específicas.

DEFINIÇÃO Extremos local e absoluto

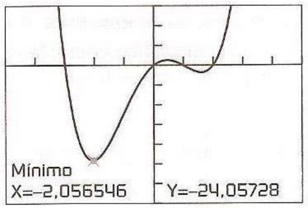
Um **máximo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é maior ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é maior ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor máximo** (ou **máximo absoluto**) de f.
Um **mínimo local** de uma função f é o valor $f(c)$ que é menor ou igual a todos os valores da imagem de f sobre algum intervalo aberto contendo c. Se $f(c)$ é menor ou igual a todos os valores da imagem de f, então $f(c)$ é o **valor mínimo** (ou **mínimo absoluto**) de f.
Extremos locais são chamados também de **extremos relativos**.

EXEMPLO 8 Identificação de extremos locais

Verifique se $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ tem máximo local ou mínimo local. Caso isso ocorra, encontre cada valor máximo ou mínimo local, além do valor de x para o qual isso ocorre.

SOLUÇÃO

O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$ (veja a Figura 7.16) sugere que existem dois valores mínimos locais e um valor máximo local. Usamos uma calculadora que faz gráfico para aproximarmos o mínimo local como $-24{,}06$ (o qual ocorre quando temos $x \cong -2{,}06$) e $-1{,}77$ (o qual ocorre quando temos $x \cong 1{,}60$). De maneira similar, identificamos o máximo local como aproximadamente $1{,}32$ (o qual ocorre quando $x \cong 0{,}46$).



$[-5, 5]$ por $[-35, 15]$
(a)

Figura 7.16 O gráfico de $y = x^4 - 7x^2 + 6x$.

Simetria

Simetria, em matemática, pode ser caracterizada numérica e algebricamente. Observaremos três tipos particulares de simetria, sendo que cada qual pode ser compreendido facilmente de um gráfico, uma tabela de valores ou uma fórmula algébrica, uma vez conhecido o que se deve observar. Ilustraremos as simetrias das três maneiras, para compreendermos a simetria gráfica, numérica e algébrica.

Simetria com relação ao eixo vertical Y

EXEMPLO: $F(X) = X^2$

Graficamente

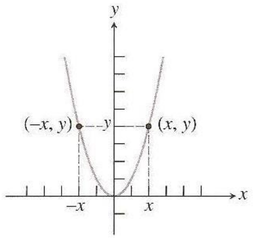


Figura 7.17 O gráfico parece o mesmo quando olhamos do lado esquerdo e direito do eixo vertical y.

Numericamente

x	$f(x)$
−3	9
−2	4
−1	1
1	1
2	4
3	9

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f temos $f(-x) = f(x)$. Funções com esta propriedade (por exemplo, x^n com n um número par) são funções **pares**.

Simetria com relação ao eixo horizontal X

EXEMPLO: $X = Y^2$

Graficamente

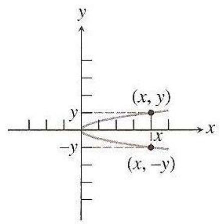


Figura 7.18 O gráfico parece o mesmo quando olhamos acima e abaixo do eixo horizontal x.

Numericamente

x	y
9	−3
4	−2
1	−1
1	1
4	2
9	3

Algebricamente

Gráficos com este tipo de simetria não são de funções, mas podemos dizer que $(x, -y)$ está sobre o gráfico quando (x, y) também está.

Simetria com relação à origem

EXEMPLO: $F(X) = X^3$

Graficamente

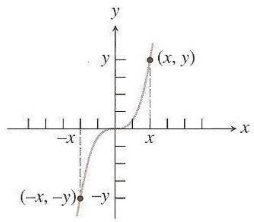


Figura 7.19 O gráfico parece o mesmo quando olhamos tanto seu lado esquerdo para baixo, como seu lado direito para cima.

Numericamente

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
1	1
2	8
3	27

Algebricamente

Para todos os valores x do domínio de f, temos $f(-x) = -f(x)$. Funções com esta propriedade (por exemplo, x^n com n um número ímpar) são funções **ímpares**.

EXEMPLO 9 Análise de funções pela simetria

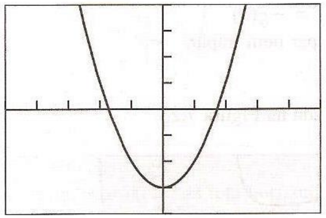
Verifique se cada uma das funções é par, ímpar ou nenhum desses casos.

(a) $f(x) = x^2 - 3$ **(b)** $g(x) = x^2 - 2x - 2$ **(c)** $h(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

SOLUÇÃO

(a) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.21.



[–5, 5] por [–4, 4]

Figura 7.20 Este gráfico parece ser simétrico com relação ao eixo vertical y, assim podemos supor que f é uma função par.

Confirmação algébrica

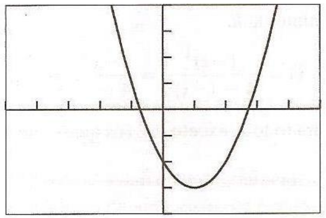
Precisamos verificar que $f(-x) = f(x)$ para todos os valores x do domínio de f.

$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$$

Desde que isso seja verdade para todo x, a função f é de fato par.

(b) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.22.



[−5, 5] por [−4, 4]

Figura 7.21 Este gráfico não parece ser simétrico com relação ao eixo vertical y ou com a origem, assim podemos supor que g não é uma função par nem ímpar.

Confirmação algébrica

Precisamos verificar que

$$g(-x) \neq g(x) \text{ e } g(-x) \neq -g(x)$$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 2 = x^2 + 2x - 2$$

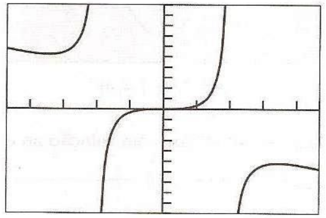
$$g(x) = x^2 - 2x - 2$$

$$-g(x) = -x^2 + 2x + 2$$

Assim, $g(-x) \neq g(x)$ e $g(-x) \neq -g(x)$.
Concluímos que g não é nem par nem ímpar.

(c) Solução gráfica

A solução gráfica é demonstrada na Figura 7.23.



[−4,7; 4,7] por [−10, 10]

Figura 7.22 Este gráfico parece ser simétrico com relação à origem, assim podemos supor que h é uma função ímpar.

Confirmação algébrica

Precisamos verificar que

$$h(-x) = -h(x)$$

para todos os valores x do domínio de h.

$$h(-x) = \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{4 - x^2} = -h(x)$$

Desde que isso seja verdade para todo x, exceto ± 2 (os quais não estão no domínio de h), a função h é ímpar.

Assíntotas

Considere o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$ na Figura 7.23.

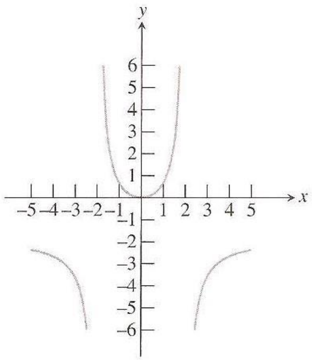


Figura 7.23 O gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$.

O gráfico parece ficar cada vez mais próximo da reta horizontal $y = -2$, quando observamos a parte abaixo. Chamamos esta reta de *assíntota horizontal*. De maneira similar, o gráfico parece ficar cada vez mais próximo tanto da reta vertical $x = -2$ como da reta $x = 2$. Chamamos estas retas de *assíntotas verticais*. Se traçarmos as assíntotas na Figura 7.23, então poderemos observar que formam uma barreira, como também o comportamento limite do gráfico. (Veja a Figura 7.24.)

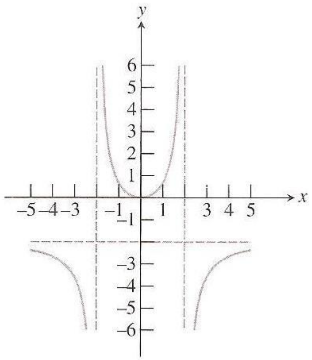


Figura 7.24 O gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2}{4 - x^2}$ com as assíntotas mostradas pelas retas tracejadas.

Desde que as assíntotas também descrevam o comportamento do gráfico nas suas extremidades tanto horizontal como vertical, a definição de uma assíntota pode ser estabelecida com a notação de limite. Nesta definição, note que $x \to a_-$ significa "x se aproxima de a pela esquerda", enquanto $x \to a_+$ significa "x se aproxima de a pela direita". Limite de função será abordado no Capítulo 15. Por ora, usaremos a notação para explicar sobre o comportamento da função nesse caso específico.

DEFINIÇÃO Assíntotas horizontal e vertical

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se $f(x)$ se aproxima do limite b quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$.
Na notação de limite:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função $y = f(x)$ se $f(x)$ tende a $+\infty$ ou $-\infty$ quando x se aproxima de a tanto pela esquerda como pela direita.
Na notação de limite:

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a_+} f(x) = \pm\infty$$

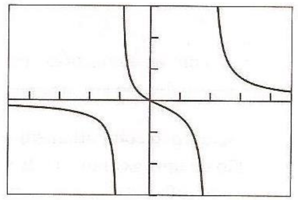
EXEMPLO 10 Identificação das assíntotas de um gráfico

Identifique as assíntotas, seja horizontal ou vertical, do gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

SOLUÇÃO

O quociente $\dfrac{x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)}$ não está definido em $x = -1$ e $x = 2$, fazendo com que estes sejam os valores por onde teremos as assíntotas verticais. O gráfico da Figura 7.25 dá esse suporte, mostrando as assíntotas verticais em $x = -1$ e $x = 2$.

Para valores altos de x, o numerador (que já é um número grande) fica menor que o denominador (que é o *produto de dois* números grandes), sugerindo que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)} = 0$. Isso indica uma assíntota horizontal em $y = 0$. O gráfico (veja a Figura 7.25) dá esse suporte, mostrando uma assíntota horizontal em $y = 0$ quando $x \to +\infty$. De maneira similar, podemos concluir que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{(x + 1)(x - 2)} = -0 = 0$, indicando a mesma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.



[−4,7; 4,7] por [−3, 3]

Figura 7.25 O gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$.

Comportamento da função nas extremidades do eixo horizontal

Uma assíntota horizontal, isto é, para valores de x que tendem a $+\infty$ ou $-\infty$, mostra como a função se comporta para valores de x nos extremos do eixo horizontal. Nem todos os gráficos se aproximam de retas nessas condições (para valores de x nos extremos do eixo horizontal), mas é útil sabermos o que ocorre além do que estamos visualizando.

EXEMPLO 11 Análise de funções por meio do comportamento nos extremos do eixo horizontal

Associe cada função a um gráfico da Figura 7.26 considerando o comportamento nos extremos do eixo horizontal. Todos os gráficos são mostrados com as mesmas dimensões.

(a) $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$ **(b)** $y = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ **(c)** $y = \dfrac{3x^3}{x^2+1}$ **(d)** $y = \dfrac{3x^4}{x^2+1}$

SOLUÇÃO

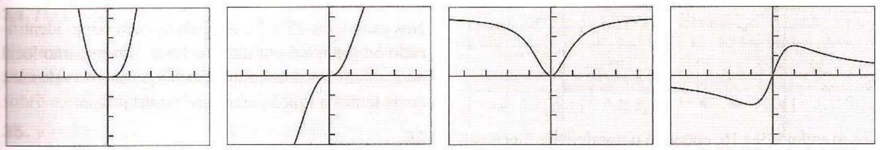
Quando x assume um valor muito grande, o denominador $x^2 + 1$ em cada uma dessas funções assume quase o mesmo valor de x^2. Se trocarmos $x^2 + 1$ em cada denominador por x^2 e simplificarmos as frações, teremos funções mais simples:

(a) $y = \dfrac{3}{x}$ (fica próximo de 0 quando x é grande) **(b)** $y = 3$

(c) $y = 3x$ **(d)** $y = 3x^2$

Para valores de x nos extremos do eixo horizontal, temos que:

- $y = \dfrac{3}{x}$ tende a 0_1, o que nos permite associar (a) com (iv)
- $y = 3$ mantém esse comportamento constante, o que nos permite associar (b) com (iii);
- $y = 3x$ tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, e tende para $-\infty$, quando x tende a $-\infty$, o que nos permite associar (c) com (ii)
- $y = 3x^2$ tende para $+\infty$ quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, o que nos permite associar (d) com i.



[−4,7; 4,7] por [−3,5; 3,5] (i) | [−4,7; 4,7] por [−3,5; 3,5] (ii) | [−4,7; 4,7] por [−3,5; 3,5] (iii) | [−4,7; 4,7] por [−3,5; 3,5] (iv)

Figura 7.26 Gráficos do Exemplo 11.

Para funções mais complicadas, nos contentamos em saber se o comportamento nos extremos do eixo horizontal é limitado ou não limitado em qualquer direção.

Revisão Rápida

Nos exercícios 1 a 4, resolva a equação ou inequação.

1. $x^2 - 16 = 0$ **2.** $9 - x^2 = 0$

3. $x - 10 < 0$ **4.** $5 - x \le 0$

Nos exercícios 5 a 10, encontre algebricamente todos os valores de x para os quais a expressão algébrica *não* está definida.

5. $\dfrac{x}{x-16}$ **6.** $\dfrac{x}{x^2-16}$

7. $\sqrt{x-16}$ **8.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

9. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$ **10.** $\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

Exercícios

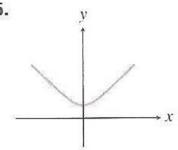
Nos exercícios 1 a 4, determine se a fórmula define y como uma função de x. Caso a resposta seja não, justifique.

1. $y = \sqrt{x-4}$ **2.** $y = x^2 \pm 3$

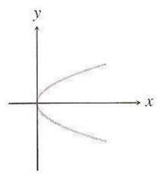
3. $x = 2y^2$ **4.** $x = 12 - y$

Nos exercícios 5 a 8, use o teste da reta vertical para determinar se a curva é o gráfico de uma função.

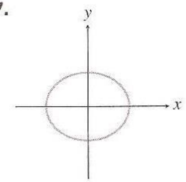
5.



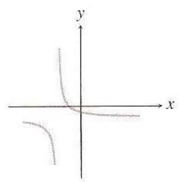
6.



7.



8.



Nos exercícios 9 a 16, encontre o domínio da função algebricamente e verifique sua conclusão graficamente.

9. $f(x) = x^2 + 4$ **10.** $h(x) = \dfrac{5}{x-3}$

11. $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x+3)(x-1)}$ **12.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x-3}$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x^2-5x}$ **14.** $h(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-3}$

15. $h(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{(x+1)(x^2+1)}$ **16.** $f(x) = \sqrt{x^4 - 16x^2}$

Nos exercícios 17 a 20, encontre a imagem da função.

17. $f(x) = 10 - x^2$ **18.** $g(x) = 5 + \sqrt{4-x}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ **20.** $g(x) = \dfrac{3+x^2}{4-x^2}$

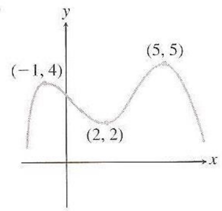
Nos exercícios 21 a 24, faça o gráfico de cada função e conclua se ela tem ou não um ponto de descontinuidade em $x = 0$. Se existe uma descontinuidade, verifique se é removível ou não removível.

21. $g(x) = \dfrac{3}{x}$ **22.** $h(x) = \dfrac{x^3+x}{x}$

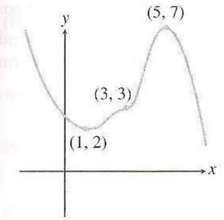
23. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **24.** $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Nos exercícios 25 a 28, conclua se cada ponto identificado no gráfico é um mínimo local, um máximo local ou nenhum dos dois casos. Identifique os intervalos nos quais temos a função crescente ou decrescente.

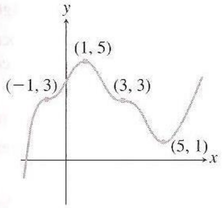
25.



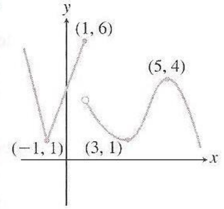
26.



27.



28.



Nos exercícios 29 a 34, faça o gráfico de cada função e identifique os intervalos nos quais temos a função crescente, decrescente ou constante.

29. $f(x) = |x + 2| - 1$

30. $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 3$

31. $g(x) = |x + 2| + |x - 1| - 2$

32. $h(x) = 0{,}5(x + 2)^2 - 1$

33. $g(x) = 3 - (x - 1)^2$

34. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Nos exercícios 35 a 40, determine se a função é limitada superiormente, limitada inferiormente ou limitada sobre o seu domínio.

35. $y = 32$ **36.** $y = 2 - x^2$

37. $y = 2^x$ **38.** $y = 2^{-x}$

39. $y = \sqrt{1 - x^2}$ **40.** $y = x - x^3$

Nos exercícios 41 a 46, a sugestão é analisar o gráfico que pode ser feito utilizando uma calculadora com esse recurso. Se possível, encontrar todos os máximos locais, os mínimos locais e os valores de x para os quais isso ocorre. Você pode concluir os valores aproximando com duas casas decimais após a vírgula.

41. $f(x) = 4 - x + x^2$ **42.** $g(x) = x^3 - 4x + 1$

43. $h(x) = -x^3 + 2x - 3$ **44.** $f(x) = (x + 3)(x - 1)^2$

45. $h(x) = x^2\sqrt{x + 4}$ **46.** $g(x) = x|2x + 5|$

Nos exercícios 47 a 54, verifique se a função é ímpar, par ou nenhum dos dois casos. Verifique sua conclusão graficamente e confirme-a algebricamente.

47. $f(x) = 2x^4$ **48.** $g(x) = x^3$

49. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ **50.** $g(x) = \dfrac{3}{1 + x^2}$

51. $f(x) = -x^2 + 0{,}03x + 5$ **52.** $f(x) = x^3 + 0{,}04x^2 + 3$

53. $g(x) = 2x^3 - 3x$ **54.** $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Nos exercícios 55 a 62, use o método de sua escolha para encontrar todas as assíntotas horizontal e vertical da função.

55. $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ **56.** $q(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

57. $g(x) = \dfrac{x + 2}{3 - x}$ **58.** $q(x) = 1{,}5^x$

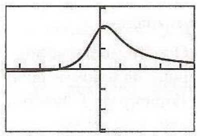
59. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$ **60.** $p(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

61. $g(x) = \dfrac{4x - 4}{x^3 - 8}$ **62.** $h(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4}$

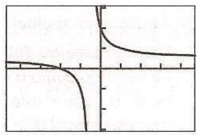
Nos exercícios 63 a 66, associe cada função ao gráfico correspondente, considerando o comportamento nos extremos do eixo horizontal e as assíntotas. Todos os gráficos são mostrados com as mesmas dimensões.

63. $y = \dfrac{x + 2}{2x + 1}$ **64.** $y = \dfrac{x^2 + 2}{2x + 1}$

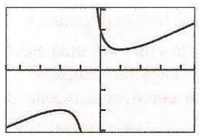
65. $y = \dfrac{x + 2}{2x^2 + 1}$ **66.** $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x^2 + 1}$



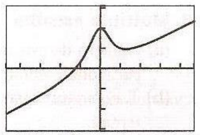
[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(a)



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(b)



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(c)



[−4,7; 4,7] por [−3,1; 3,1]
(d)

67. Um gráfico pode cruzar sua própria assíntota? A origem grega da palavra "assíntota" significa "sem encontro", o que mostra que os gráficos tendem a se aproximar, mas não encontrar suas assíntotas. Quais das seguintes funções têm gráficos que podem interseccionar suas assíntotas horizontais?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

68. Um gráfico pode ter duas assíntotas horizontais? Embora muitos gráficos tenham no máximo uma assíntota horizontal, é possível para um gráfico ter mais do que uma. Quais das seguintes funções têm gráficos com mais de uma assíntota horizontal?

(a) $f(x) = \dfrac{|x^3 + 1|}{8 - x^3}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 4}$

(c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

69. Um gráfico pode interseccionar sua própria assíntota vertical?

Seja a função $f(x) = \dfrac{x - |x|}{x^2} + 1$. Se possível, construa o gráfico dessa função.

(a) O gráfico desta função não intersecciona sua assíntota vertical. Explique por que isso não ocorre.

(b) Mostre como você pode adicionar um único ponto no gráfico de f e obter um gráfico que interseccione sua assíntota vertical.

(c) O gráfico em (b) é de uma função?

70. Explique por que um gráfico não pode ter mais do que duas assíntotas horizontais.

71. Verdadeiro ou falso O gráfico de uma função f é definido como o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ onde x está no domínio de f. Justifique sua resposta.

72. Verdadeiro ou falso Uma relação que é simétrica com relação ao eixo x não pode ser uma função. Justifique sua resposta.

73. Múltipla escolha Qual função é contínua?

(a) Número de crianças inscritas em uma escola particular como uma função do tempo.

(b) Temperatura externa como uma função do tempo.

(c) Custo para postar uma carta como uma função do seu peso.

(d) Preço de uma ação em função do tempo.

(e) Número de bebidas não-alcoólicas vendidas como uma função da temperatura externa.

74. Múltipla escolha Qual das funções *não* é contínua?

(a) Sua altitude como uma função do tempo enquanto viaja voando de um lugar para outro.

(b) Tempo de viagem de um lugar para outro como uma função da velocidade da viagem.

(c) Número de bolas que podem ser colocadas até preenchimento total de uma caixa como uma função do raio das bolas.

(d) Área de um círculo como uma função do raio.

(e) Peso de um bebê como uma função do tempo após seu nascimento.

75. Função decrescente Qual das funções é decrescente?

(a) Temperatura externa como uma função do tempo.

(b) A média do índice Dow Jones como uma função do tempo.

(c) A pressão do ar na atmosfera terrestre como uma função da altitude.

(d) População mundial desde 1900 como uma função do tempo.

(e) Pressão da água no oceano como uma função da profundidade.

76. Crescente ou decrescente Qual das funções não pode ser classificada como crescente ou decrescente?

(a) O peso de um bloco de chumbo como uma função do volume.

(b) A altura de uma bola que foi lançada para cima como uma função do tempo.

(c) O tempo de viagem de um lugar para outro como uma função da velocidade da viagem.

(d) A área de um quadrado como uma função do comprimento do lado.

(e) O peso de um pêndulo balançando em função do tempo.

77. Você pode mostrar algebricamente agora que $p(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ é limitada.

(a) Faça o gráfico da função e encontre o menor valor inteiro de k que parece ser um limite superior.

(b) Verifique que $\frac{x}{1+x^2} < k$ provando a inequação equivalente $kx^2 - x + k > 0$.

(Você pode resolver a equação para mostrar que não existe solução real.)

(c) Do gráfico, encontre o menor valor inteiro de k que parece ser um limite inferior.

(d) Verifique $\frac{x}{1+x^2} > k$ provando a inequação equivalente $kx^2 - x + k < 0$.

78. Considere a tabela com valores X e Y:

X	Y
60	0,00
65	1,00
70	2,05
75	2,57
80	3,00
85	3,36
90	3,69
95	4,00
100	4,28

Considerando Y como uma função de X, ela é crescente, decrescente, constante ou nenhuma das situações?

79. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é contínua para todo x;

(b) f é crescente nos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[3, 5]$;

(c) f é decrescente nos intervalos $[0, 3]$ e $[5, +\infty[$;

(d) $f(0) = f(5) = 2$;

(e) $f(3) = 0$.

80. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$;

(b) f tem um ponto não removível de descontinuidade em $x = 0$;

(c) f tem uma assíntota horizontal em $y = 1$;

(d) $f(0) = 0$;

(e) f tem uma assíntota vertical em $x = 0$.

81. Esboce um gráfico de uma função f com domínio como o conjunto de todos os números reais que satisfazem todas as condições que estão a seguir:

(a) f é contínua para todo x;

(b) f é uma função par;

(c) f é crescente no intervalo $[0, 2]$ e decrescente no intervalo $[2, +\infty[$;

(d) $f(2) = 3$.

82. Uma função que é limitada superiormente tem um número infinito de limites superiores, mas existe sempre um *menor limite superior*, isto é, um limite superior que é o menor de todos os outros. Este menor dos limites superiores poderia ou não estar na imagem de f. Para cada função a seguir, encontre o menor dos limites superiores e conclua se está ou não na imagem da função.

(a) $f(x) = 2 - 0{,}8x^2$

(b) $g(x) = \frac{3x^2}{3 + x^2}$

(c) $h(x) = \frac{1 - x}{x^2}$

(d) $q(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x + 1}$

83. Uma função contínua f tem como domínio o conjunto de todos os números reais. Se $f(-1) = 5$ e $f(1) = -5$, explique por que f precisa ter pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 1]$ (isto generaliza uma propriedade de função contínua conhecida, no cálculo, como Teorema do Valor Intermediário).

84. Mostre que o gráfico de toda função ímpar, com domínio como sendo todos os números reais, necessariamente passa pela origem.

85. Se possível, analise o gráfico da função $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ no intervalo $[-6, 6]$ por $[-2, 2]$.

(a) Qual é a aparente assíntota horizontal do gráfico?

(b) Baseado no gráfico, conclua qual é a aparente imagem de f.

(c) Mostre algebricamente que $-1 \leq \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} < 1{,}5$ para todo x, confirmando assim sua suposição no item (b).