



CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA: MONTANTE E VALOR ATUAL PARA PAGAMENTO ÚNICO

Capitalização composta é aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Neste regime de capitalização a taxa varia exponencialmente em função do tempo.

O conceito de montante é o mesmo definido para capitalização simples, ou seja, é a soma do capital aplicado ou devido mais o valor dos juros correspondentes ao prazo da aplicação ou da dívida.

A simbologia é a mesma já conhecida, ou seja, **VF**, o montante, **VP**, o capital inicial, **n**, o prazo e **i**, a taxa.

A dedução da fórmula do montante para um único pagamento é pouco mais complexa que aquela já vista para a capitalização simples. Para facilitar o entendimento, vamos admitir que nos defrontamos com o seguinte problema:

Calcular o montante de um capital de R\$ 1.000,00, aplicado á taxa de 4% ao mês, durante 5 meses.

Dados:

$$VP = 1.000,00$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$i = 4\% \text{ ao mês} = 0,04$$

$$VF = ?$$

mês (t)	capital no início do mês (p_t)	juros correspondentes ao mês (j_t)	montante no final do mês (s_t)
1	1.000,00	1.000,00 x 0,04 = 40,00	1.040,00
2	1.040,00	1.040,00 x 0,04 = 41,60	1.081,60
3	1.081,60	1.081,60 x 0,04 = 43,26	1.124,86
4	1.124,86	1.124,86 x 0,04 = 45,00	1.169,86
5	1.169,86	1.169,86 x 0,04 = 46,79	1.216,65

Logo o montante será de R\$ 1.216,65

Algebricamente podemos deduzir que:

$$VF_0 = VP \Rightarrow \text{montante no momento zero (hoje).}$$

Temos que Montante é Capital mais juros $\Rightarrow VF = VP + VP \cdot i$, então:

$$VF_1 = VP + VP \cdot i = VP(1+i) \Rightarrow \text{montante no final do primeiro período;}$$

$$VF_2 = VP(1+i) + VP(1+i) \cdot i = VP(1+i)(1+i) = VP(1+i)^2$$

$$VF_3 = VP(1+i)^2 + VP(1+i)^2 \cdot i = VP(1+i)^2(1+i) = VP(1+i)^3$$

$$VF_4 = VP(1+i)^3 + VP(1+i)^3 \cdot i = VP(1+i)^3(1+i) = VP(1+i)^4$$

.

.

$$VF_n = VP(1+i)^n + VP(1+i)^n \cdot i = VP(1+i)^n(1+i) = VP(1+i)^n$$

Como não há possibilidade de confusão, para simplificar vamos fazer **VF_n = VF**. Assim, a fórmula final do montante é dada pela equação:

$$\boxed{VF = VP(1+i)^n}$$

No exercício anterior podemos fazer:

$$VF_5 = 1.000 (1+0,04)^5 = 1.216,65, \text{ que confere com o valor determinado anteriormente.}$$



Exemplos:

1. Calcular o montante de uma aplicação de \$ 15.000,00, pelo prazo de 6 meses, á taxa de 3% ao mês.

Dados:

$$VP = 15.000,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = 3\% \text{ ao mês} = 0,03$$

$$VF = ?$$

Solução:

$$VF = P(1+i)^n$$

$$VF = 15000(1+0,03)^6$$

$$\text{Resp. } VF = 17.910,78$$

2. No final de dois anos, devo efetuar um pagamento de \$ 200.000,00 referente ao valor de um empréstimo contraído hoje, sabendo que a taxa acordada foi de 4% ao mês com capitalização mensal, pergunta-se: Qual o valor emprestado?

Dados:

$$VF = 200.000,00$$

$$n = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}$$

$$i = 4\% \text{ ao mês} = 0,04$$

$$VP = ?$$

Solução:

3. Uma determinada loja financia a venda de uma mercadoria no valor de \$ 1.299,99, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de \$ 2.151,48 no final de 8 meses. Qual a taxa mensal cobrada pela loja?

Dados:

$$VF = 2.151,48$$

$$VP = 1.299,99$$

$$n = 8 \text{ meses}$$

$$i = ?$$

Solução:

4. Em que prazo um empréstimo de \$ 20.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de \$ 41.578,56, sabendo-se que a taxa contratada é de 5% ao mês?

Dados:

$$VF = 41.578,56$$

$$VP = 20.000,00$$

$$i = 5\% \text{ ao mês} = 0,05$$

$$n = ?$$

Solução:

5. A que taxa um capital de \$ 43.000,00 pode ser dobrado em 18 meses?

Dados:

$$VF = 2 \times 43.000,00 = 86.000,00$$

$$VP = 43.000,00$$

$$n = 18 \text{ meses}$$

$$i = ?$$

Solução:



6. Um título de renda fixa deverá ser resgatado por \$ 10.000,00 no seu vencimento, que ocorrerá dentro de três meses. Sabendo-se que o rendimento desse título é de 15% ao ano, determinar o seu valor presente.

Dados:

$$VF = 10.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$i = 15\% \text{ ao ano}$$

$$VP = ?$$

*Neste caso o período está em **meses** e a taxa em **ano**, na capitalização composta à taxa não pode ser dividida para se adequar ao período, para adequar a taxa ao período temos que fazer equivalência de taxa, ou adequar o período a taxa.*

EQUIVALÊNCIA DE TAXAS

Diz-se que a taxa mensal i_m é equivalente à taxa anual i_a quando:

$$VP(i+i_a) = VP(i+i_m)^{12}$$

ou seja, duas ou mais taxas referenciadas a períodos unitários distintos são equivalentes quando produzem o mesmo montante no final de determinado tempo, pela aplicação de um mesmo capital inicial. Da igualdade acima, deduz-se que:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12}$$

Para determinar a taxa anual, conhecida a taxa mensal.

$$i_a = (1+i_m)^{12} - 1$$

Para determinar a taxa mensal, quando se conhece a anual.

$$i_m = \sqrt[12]{(1+i_a)} - 1 = (1+i_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

Da mesma forma, dada uma taxa mensal ou anual, determina-se à taxa diária e vice-versa.

Exemplos:

a) Determinar a taxa anual equivalente a 2% ao mês:

$$i_a = (1+i_m)^{12} - 1 = (1,02)^{12} - 1 = 1,2682 - 1 = 0,2682 \text{ ou } 26,82\%$$

b) Determinar a taxa mensal equivalente a 60,103% ao ano:

$$i_m = (1+i_a)^{1/12} - 1 = (1,60103)^{1/12} - 1 = 1,04 - 1 \text{ ou } 4\% \text{ ao mês}$$

c) Determinar a taxa anual equivalente a 0,19442% ao dia:

$$i_a = (1+i_d)^{360} - 1 = (1,0019442)^{360} - 1 = 2,0122 - 1 = 1,0122 \text{ ou } 101,22\% \text{ ao ano}$$

d) Determinar a taxa trimestral equivalente a 47,746% em dois anos:

$$i_t = (1+i_{2a})^{1/8} - 1 = (1,47746)^{1/8} - 1 = 1,05 - 1 = 0,05 = 5\% \text{ ao trimestre}$$

e) Determinar a taxa anual equivalente a 1% á quinzena:

$$i_a = (1+i_q)^{24} - 1 = (1,01)^{24} - 1 = 1,2697 - 1 = 0,2697 = 26,97\% \text{ ao ano}$$



Como no dia-a-dia os períodos a que se referem às taxas que se tem e taxas que se quer são os mais variados, vamos apresentar uma fórmula genérica, que possa ser utilizada para qualquer caso, ou seja:

$$i_q = (1 + i_t)^{\frac{q}{t}} - 1$$

Para efeito de memorização denominamos as variáveis como segue:

i_q = taxa para o prazo que eu quero

i_t = taxa para o prazo que eu tenho

q = prazo que eu quero

t = prazo que eu tenho

Vejamos alguns exemplos:

f) Determinar a taxa para 183 dias, equivalente a 65% ao ano:

$$i_{183} = (1,65)^{183/360} - 1 = 28,99\%$$

g) Determinar a taxa para 491 dias, equivalente a 5% ao mês:

$$i_{491} = (1,05)^{491/30} - 1 = 122,23\%$$

h) Determinar a taxa para 27 dias, equivalente a 13% ao trimestre:

$$i_{27} = (1,13)^{27/90} - 1 = 3,73\%$$

6. Uma pessoa aplica \$ 5.000,00 num título de renda fixa com vencimento no final de 121 dias, a uma taxa de 52% ao ano. Calcular o seu valor de resgate.

Dados:

$$VP = 5.000,00$$

$$i = 52\% \text{ ao ano}$$

$$n = 121 \text{ dias}$$

$$VF = ?$$

7. Qual a taxa mensal de juros cobrada num empréstimo de \$ 6.000,00 para ser quitado por \$ 6.600,00 no prazo de 75 dias?

Dados:

$$VP = 6.000,00$$

$$VF = 6.600,00$$

$$n = 75 \text{ dias}$$

$$i = ?$$



Exercícios

1. Determinar o montante acumulado em seis trimestres, com uma taxa de 1,2% ao mês, no regime de juros compostos, a partir de um principal de \$ 10.000,00.
Resp. 12.395,08
2. Determinar o principal que deve ser investido para produzir um montante de \$20.000,00, num prazo de dois anos, com uma taxa de 12% ao semestre, no regime de juros compostos.
Resp. 12.710,36
3. Um investidor aplicou \$10.000,00 para receber \$11.200,00 no prazo de um ano. Determinar a taxa de rentabilidade mensal desse investidor, no regime de juros compostos.
Resp. 0,949% a.m.
4. Determinar o montante acumulado em oito trimestres a partir de um principal aplicado de \$ 10.000,00, com uma taxa de 1,2% ao mês, no regime de juros compostos.
Resp. 13.314,72
5. Determinar o período necessário para um capital duplicar de valor, com uma taxa de 1% ao mês, no regime de juros compostos.
Resp. 2.090 dias
6. Um banco comercial realiza suas operações de desconto de títulos a juros simples, com uma taxa de desconto "por fora" de 1,5% ao mês, e exige um saldo médio de 20% do valor da operação. Uma empresa descontou \$ 100.000,00 de títulos nesse banco, todos com vencimento no prazo de três meses. Determinar o valor líquido colocado a disposição da empresa, na data da operação, e as taxas mensais de rentabilidade do banco, nos regimes de Juros simples e compostos.
Resp. 75.500,00 1,9867% mês 1,9485% mês
7. Um investidor deseja fazer uma aplicação financeira a juros compostos de 1,5% ao mês, de forma a garantir uma retirada de \$ 10.000,00 no final do 6º mês e outra de \$20.000,00 no final do 12º mês, a contar da data da aplicação. Determinar o menor valor que deve ser investido para permitir a retirada desses valores nos meses indicados.
Resp. 25.873,17
8. Uma empresa deseja liquidar uma nota promissória de \$ 10.000,00 vencida há três meses, e ainda antecipar o pagamento de outra de \$50.000,00 com cinco meses a decorrer até seu vencimento. Determinar o valor do pagamento a ser feito de imediato pela empresa para liquidar essas duas notas promissórias, levando em consideração uma taxa de 1,2% ao mês, juros compostos, e assumindo os meses com 30 dias.
Resp. 57.469,38
9. Uma empresa contraiu um empréstimo a juros compostos de 1,2% ao mês, para ser liquidado no prazo de um ano, com dois pagamentos semestrais iguais de \$ 100.000,00. Esse empréstimo, entretanto, pode ser quitado com um único pagamento no valor de \$ 197.755,02. Determinar no final de que mês deve ser feito esse pagamento para que a taxa de 1,2% ao mês seja mantida.
Resp. 8 meses
10. Um banco de investimento que opera com juros compostos de 1% ao mês está negociando um empréstimo com uma empresa que pode liquidá-lo com um único pagamento de \$106.152,02, no final do 6º mês, a contar da assinatura do contrato. Determinar o valor que deve ser abatido



do principal desse empréstimo, no ato da contratação, para que esse pagamento seja limitado em \$90.000,00, e para que a taxa de 1% ao mês seja mantida.

Resp. 15.215,93

11. Determinar o valor de uma aplicação financeira que produz um valor de resgate de \$10.000,00 ao final de 21 dias, com uma taxa de 1,5% ao mês, no regime de juros compostos.

Resp. 9.896,32

12. Determinar o valor de resgate de uma aplicação financeira de \$10.000,00, realizada no regime de juros compostos, com uma taxa de 15% ao ano, pelo prazo de 18 dias.

Resp. 10.070,13

13. Um investidor tem uma poupança de \$100.000,00 aplicada num banco que lhe garante uma remuneração de 0,8% ao mês para os próximos três meses, e lhe são oferecidas as seguintes alternativas de investimentos:

a) aplicação de um valor máximo de \$50.000,00, a uma taxa de 1,5% ao mês, por um prazo de três meses;

b) aplicação de um valor mínimo de \$100.000,00, a uma taxa de 1,0% ao mês, por um prazo de três meses.

Definir a política de investimentos para esse investidor, para os próximos três meses, sabendo-se que todas as aplicações são remuneradas no regime de juros compostos.

14. Um banco de investimentos realiza suas operações de financiamento com uma taxa efetiva de juros de 12% ao ano, no regime de juros compostos. Entretanto, essa taxa é cobrada em duas parcelas:

a) uma parcela de 8% ao ano, cobrada de forma postecipada, ao longo do contrato;

b) uma parcela antecipada cobrada no ato da liberação dos recursos.

Determinar o percentual que deve ser cobrado antecipadamente, no ato da liberação dos recursos, para que a taxa de 12% ao ano seja mantida, sabendo-se que os financiamentos são liquidados com o pagamento de uma única parcela no final do 6º mês, a contar da liberação dos recursos.

Resp. 1,802% antecipado

Outros Exercícios

1. Determinar o montante, no final de 10 meses, resultante da aplicação de um capital de \$100.000,00 à taxa de 3,75%, ao mês.

Resposta \$ 144 504,39.

2. Uma pessoa empresta \$ 80.000,00 hoje para receber \$ 507.294,46 no final de dois anos. Calcular as taxas, mensal e anual desse empréstimo.

Resposta' 8% ao mês. ou 151,817% ao ano

3. Sabendo-se que a taxa trimestral de juros cobrada por uma instituição financeira é de 12,486%, determinar qual o prazo em que um empréstimo de \$ 20 000,00 será resgatado por \$ 36 018,23.

Resposta: 5 trimestres (ou 15 meses).

4. Quanto devo aplicar hoje, á taxa de 51,107% ao ano, para ter \$ 1.000 000,00 no final de 19 meses?

Resposta \$ 520 154,96



5. Uma empresa obtém um empréstimo de \$ 700.000,00 que será liquidado de uma só vez, no final de dois anos Sabendo se que a taxa de juros e de 25% ao semestre, calcular o valor pelo qual esse empréstimo deverá ser quitado.

Resposta \$ 1.708.984,38

6. Em que prazo uma aplicação de \$ 374.938,00, a taxa de 3,25% ao mês, gera um resgate de \$ 500.000,00.

Resposta: 9 meses.

7. Um terreno está sendo oferecido por \$ 450.000,00 à vista ou \$ 150.000 00 de entrada e mais uma parcela de \$ 350.000,00, no final de 6 meses. Sabendo-se que no mercado a taxa média para aplicação em títulos de renda prefixada gira em torno de 3,5% ao mês (taxa líquida, isto e, com o Imposto de Renda já computado), determinar a melhor opção para um interessado que possua recursos disponíveis para comprá-lo.

Resposta: A melhor opção e comprá-lo a prazo.

8. A que taxa de juros um capital aplicado pode ser resgatado, no final de 17 meses, pelo dobro do seu valor?

Resposta: 4,162% ao mês.

9. Em quanto tempo um capital pode produzir juros iguais a 50% do seu valor se aplicado a 3,755% ao mês?

Resposta: 11 meses.

10. A aplicação de certo capital, a taxa de 69,588% ao ano, gerou um montante de \$ 820.000,00 no final de 1 ano e 3 meses. Calcular o valor dos juros.

Resposta: \$ 396.288,79

11. Qual e mais vantajoso: aplicar \$ 10.000.00 por 3 anos, a juros compostos de 3% ao mês, ou aplicar esse mesmo valor, pelo mesmo prazo, a juros simples de 5% ao mês?

Resposta. Aplicar a juros compostos de 3% ao mês.

12. No fim de quanto tempo um capital aplicado à taxa de 4 % ao mês, quadruplica o seu valor:

a) no regime de capitalização composta.

b) no regime de capitalização simples.

Respostas: a) 35,35 meses.

b) 75 meses.

13. Qual o montante produzido pela aplicação de \$ 580.000,00, a taxa de 175% ao ano, pelo prazo de 213 dias?

Resposta. \$ 1.055.277,08.

14. Qual o valor do capital, que aplicado à taxa de 18 % ao trimestre durante 181 dias, produziu um montante de \$5.000,00?

Resposta: \$ 3.584,32.

15. A aplicação de \$ 400.000.00 proporcionou um resgate de \$ 610.461,56 no final de seis meses. Determinar as taxas mensal e anual dessa operação.

Resposta: 7,3% ao mês e 123,91% ao ano.

16. Certa aplicação rende 0,225% ao dia. Em que prazo um investidor poderá receber o dobro da sua aplicação?



Resposta: 308 dias.

17. A aplicação de \$ 380.000,00 proporcionou um rendimento de \$ 240 000,00 no final de 208 dias. Determinar a taxa diária, mensal, trimestral e anual de juros

Resposta: 0,24% ao dia, 7,32% ao mês; 23,59% ao trimestre e 133,33% a a

18. Em 154 dias uma aplicação rendeu 41,123% Calcular as taxas mensal e anuais equivalentes

Resposta 6,941% ao mês e 123,722% ao ano.

19. Um banco cobra 20% a.a. de juros (além da correção monetária) numa operação de capital de giro Quanto cobrara para uma operação em 182 dias? (Considerar o ano como sendo de 360 dias).

Resposta: 9,656%

20. Quanto uma pessoa resgatara no final de 93 dias se aplicar \$ 2 milhões à taxa de 150% ao ano? E qual a taxa mensal equivalente?

Resposta \$ 2.534.143,27 e 7,935% ao mês.

21. Um Certificado de Depósito Bancário (CDB) equivalente a 500 URV rende juros de 15% ao ano Sendo o seu prazo de 243 dias, calcular o valor de resgate (em URV), antes do Imposto de Renda

Resposta: 549,46628 URV.